Medve Szabadtéri Matekverseny

Országos döntő

Nagymedve kategória (9. és 10. osztály)

Feladatok részletes megoldással

2019. június 1.

Tartalomjegyzék

1. feladat **2**

2. feladat **3**

3. feladat **4**

4. feladat **5**

5. feladat **6**

6. feladat **7**

7. feladat **9**

8. feladat **11**

9. feladat **12**

10. feladat **13**

11. feladat **14**

12. feladat **16**

13. feladat **17**

14. feladat **19**

15. feladat **20**

Végeredmények **21**

1. feladat

Az Urp bolygón élő zorgok mindegyikének 6 lába és 4 keze van, a lábaikon 6-6, a kezeiken 8-8 ujjal. Számolni csak az ujjaikon tudnak (ehhez a saját kéz- és lábujjaikat használják). Azokat a műveleteket, amiknek az eredménye több lenne, mint az ujjaik száma, nem tudják elvégezni.
Egyszer egy utazó találkozott két zorggal. Megkérdezte mindkettőjüktől, hogy hány pozitív osztója van a kedvenc számuknak, amire mind a ketten azt felelték, hogy kettő. Ezután megkérdezte azt is, hogy hány pozitív osztója van a két szám összegének, erre a zorgok rövid számolás után azt válaszolták, hogy három. Végül azt is megkérdezte tőlük, hogy hány osztója van a két szám szorzatának, azonban erre a zorgok nem tudtak válaszolni, mivel nem tudták összeszorozni a két számot. Mennyi a két szám szorzata?

Végeredmény

94

Megoldás

1. A zorgok $6 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 68$-ig tudnak elszámolni, tehát a 68-nál nagyobb számokat nem ismerik.
2. Minden egész számnak biztosan osztója az 1, és biztosan osztója maga a szám is. Tehát ha egy számnak pontosan két osztója van, az osztóit is tudjuk: 1 és önmaga. Egyébként a pontosan két pozitív osztóval rendelkező számokat *prímeknek* nevezzük.
3. Mindkét zorg kedvenc száma prím. Jelöljük a két kedvenc számot a-val és b-vel!
4. Ha egy szám kettő vagy több különböző prím szorzata, legalább négy pozitív osztója van (ha p és q különböző prímek, $p \cdot q$-nak osztója az 1, p, q és $p \cdot q$). Ebből tudjuk, hogy a két kedvenc szám összege nem lehet se prím, se kettő vagy több különböző prím szorzata, hiszen három pozitív osztója van. A két kedvenc szám összege, azaz $a + b$ így csak két egyforma prímszám szorzata, azaz egy prímszám négyzete lehet, ekkor az osztói az 1, p és $p \cdot p$ (azaz maga a szám).
5. Az egyetlen páros prím a 2 (hiszen a többi páros szám osztható 2-vel, így több mint két pozitív osztója van: 1, 2 és önmaga biztos osztói). Tehát $a + b$ vagy $2 \cdot 2 = 4$, vagy páratlan. Ha $a + b$ 4 lenne, $a \cdot b$-t biztosan ki tudnák még számolni a zorgok, hiszen így nem lehetne nagyobb, mint 68. Tehát tudjuk, hogy $a + b$ páratlan.
6. Ha $a + b$ páratlan, akkor a és b közül az egyik páros, a másik páratlan. Válasszuk meg a-t és b-t úgy, hogy b páros! Tudjuk, hogy b prím is, így azt is tudjuk, hogy $b = 2$.
7. A két kedvenc szám szorzata, azaz $a \cdot b = a \cdot 2$ nagyobb, mint 68, hiszen a zorgok nem tudták kiszámolni. Innen azt is tudjuk, hogy $a > 34$.
8. $a + b = a + 2$ biztosan legfeljebb 68, hiszen a zorgok még ki tudták számolni. Az előző egyenlőtlenségből tudjuk azt is, hogy $a + 2 > 36$. Tehát tudjuk, hogy $36 < a + b \leq 68$.
9. $a + b$-ről tudjuk, hogy egy prím négyzete. 36 és 68 között egyetlen ilyen szám van: $49 = 7 \cdot 7$.
10. $a + 2 = 49$, tehát $a = 47$. Ez stimmel is, mivel a 47 valóban prím.
11. $a = 47$ és $b = 2$, tehát $a \cdot b$, azaz a két kedvenc szám szorzata $47 \cdot 2 = 94$.

2. feladat

Mök Töhötöm pingpongozni ment két testvérével, Álmossal és Előddel. Az első meccset Álmos játszotta Előd ellen, a következő játékokban pedig mindig az előző vesztes pihent. Végül Álmos 8, Előd 17, Töhötöm pedig 13 meccset nyert. Hányszor játszott egymással Töhötöm és Álmos?

Végeredmény

10

Megoldás

1. Minden lejátszott meccset pontosan egy játékos nyert meg, tehát hármuk győzelmeinek az együttes száma megegyezik a meccsek számával $\implies$ $8 + 17 + 13 = 38$ meccset játszottak.

2. Töhötöm és Álmos pontosan azokon a meccseken játszott egymással, amelyek alatt Előd pihent.

3. A lejátszott 38 meccs alatt Előd szemszögéből végig három fázis ismétlődik (ebben a sorrendben, a játék elején az (a)-val kezdődően):

   (a) valahány (esetleg 0) egymást követő győzelem,

   (b) 1 vereség,

   (c) 1 pihenő.

   Tudjuk, hogy Előd összesen 17 alkalommal nyert. Ha ezeket a meccseket egyáltalán nem vesszük figyelembe, akkor a maradék 21 meccs alatt a (b) és (c) fázisok váltják egymást, (b)-vel indulóan. Tehát Előd 11 alkalommal veszít, 10 meccsen keresztül pedig pihen.

4. Tehát Töhötöm és Álmos összesen 10-szer játszott egymás ellen.

3. feladat

A Picur Édességgyár egyik kedvelt terméke a Barackocka. Ez úgy készül, hogy egy darab aszalt barackot kocka formájúra vágnak, majd minden lapjára különböző bevonó kerül. Így mindegyik kockának van egy fehércsokis, egy tejcsokis, egy étcsokis, egy keserű csokis, egy kakaós és egy kávés lapja. Egy gyárlátogatás során Gombóc Artúr zsebre vágott néhány Barackockát, hogy otthon megegye őket. Sajnos ezek a kockák (teljes lapfelülettel) összeragadtak a zsebében. Mivel Artúr nem bírt várni, így hazafele úton lenyalta a bevonót a zsebében lévő összeragadt test felületéről. Legalább hány Barackockát vágott zsebre Gombóc Artúr, ha ugyanannyi tejcsokit nyalt le, mint amennyi étcsokit, fehércsokit és keserű csokit összesen?

Végeredmény

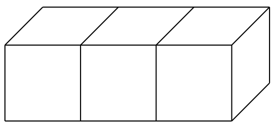
4

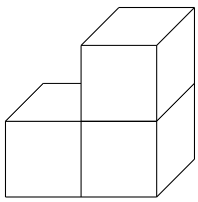
Megoldás

1. Egy kocka esetén a feladatban leírt csokoládéfogyasztás nem történhet meg, hiszen akkor egy lapnyi tejcsokit, és összesen három lapnyi ét-, fehér- és keserű csokoládét nyalt volna le.

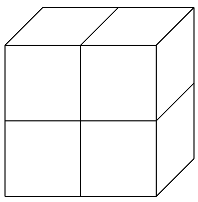
2. Két kocka esetén az összeragadás következtében az összes lap közül 2 nem látszik. Ekkor a test felületén a tejcsokis lapok száma legfeljebb 2, az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok száma összesen legalább $2 \cdot 3 - 2 = 4$, hiszen az összes ilyen ízű lap közül legfeljebb 2 nem került a felszínre. Így a feladatban leírt csokoládéfogyasztás két kocka esetén nem fordulhatott elő, mert biztosan kevesebb tejcsokit nyalt le, mint a másik három ízt összesen.

3. Három kocka kétféleképp ragadhat össze egy testté teljes lapfelület mentén, ahogy az ábrán látható. Mindkét esetben a kockák lapjai közül 4 kerül a test belsejébe. Így a test felületén a tejcsokis lapok száma legfeljebb 3, az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok száma összesen legalább $3 \cdot 3 - 4 = 5$, hiszen az összes ilyen ízű lap közül legfeljebb 4 nem került a felszínre. Így a feladatban leírt eset három kocka esetén nem fordulhatott elő, mert biztosan kevesebb tejcsokit nyalt le, mint a másik három ízt összesen.





4. A négy kockából előálló testek közül az ábrán látható olyan, hogy a kockáknak összesen 8 lapja kerül a test belsejébe. Ekkor a test felületén a tejcsokis lapok száma legfeljebb 4, az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok száma összesen legalább $4 \cdot 3 - 8 = 4$. Tehát ha az összes tejcsokis lap a test felszínén marad, és a test belsejébe kerülő lapok mindegyike az ét-, fehér- és keserű csokoládésak közül kerül ki, akkor előállhat a feladatban leírt csokoládéfogyasztás. Ez meg is történhet, ugyanis minden kockának két szomszédos lapja kerül a test belsejébe, és az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok közül bármilyen elrendezés esetén van két szomszédos.



4. feladat

Gerzson autójának műszerfalán található az ábrán látható hat számjegyű kijelző, ami az autó által megtett kilométerek számát mutatja, jelenleg éppen 2019-en áll. Azonban egy gyártási hiba miatt a kijelző egyik számjegy helyén sem tud 4-est mutatni, így a számláló minden számjegy helyén a 3 után rögtön az 5-ösre ugrik. Hány kilométer utat tett meg valójában az autó?

0	0	2	0	1	9

Végeredmény

1475

Megoldás

1. Elsőként fontos leszögezni, hogy az ugrások miatt most többet mutat a számláló, mint amennyi a valós érték, tehát egy 2019-nél kisebb szám a megoldás.

2. A megoldásunk 2019-nél annyival kisebb, ahány olyan szám van 0 és 2019 között, amelyben legalább egy 4-es számjegy előfordul. Számoljuk meg ezeket helyiértékenként, magasabb helyiérték felől az alacsonyabb felé haladva!

3. Az ezresen nem értünk még el a 4-es számjegyig, így ott még nem fordult elő a hiba.

4. A százas helyiértéken kétszer (ezrenként egyszer) történt olyan, hogy 3-ról 5-re ugrott a számláló, ennek során $2 \cdot 100 = 200$ számot ugrottunk át.

5. A tízes helyiértéken 20-szor (ezrenként tízszer) ugrottuk át a 4-est, mindanyiszor 10 számot kihagyva, azonban ebben benne van az a $2 \cdot 10 = 20$ szám is, amit már az előző pontban idegyűjtöttünk: 440-től 449-ig és 1440-től 1449-ig. Ezt figyelembe véve, ebben a pontban $20 \cdot 10 - 2 \cdot 10 = 180$ számot ugrottunk át újonnan.

6. Az egyes helyiértéken 202-szer (ezrenként százszor, továbbá 2000 felett még kétszer) kellett volna 4-es számjegynek állnia, melyeket a számláló hibája miatt átugrott. Ebben a 202-ben benne van az a $2 \cdot 10 = 20$, melyet a 4. pontban már idesoroltunk (404, 414, ..., 494, illetve 1404, 1414, ..., 1494), valamint az a 18 szám is, melyeket az 5. pontban gyűjtöttünk össze (44, 144, 244, 344, 544, ..., 1344, 1544, ..., 1844, 1944), azaz ehhez a ponthoz $202 - 20 - 18 = 164$ átugrott szám tartozik.

7. Összeadva az előző pontok eredményeit: $200+180+164 = 544$-et kapunk. Mivel pontról pontra ügyeltünk arra, hogy a több 4-es számjeggyel rendelkező számokat ne számoljuk többször, így utólagos korrekcióra nincs szükség, az 544-et a 2019-ből kivonva adódik a végeredmény, ami $2019 - 544 = 1475$.

5. feladat

A Matematikus Medveképző Általános Iskola egy osztályában minden medvebocs jár háromféle szakkör valamelyikére: 17-en méhészetre, 12-en medvetáncra és 15-en kungfura. Azok száma, akik pontosan kétféle szakkörre járnak, éppen ötszöröse azok számának, akik mindhárom szakkörön részt vesznek. Az osztályba járó fiú medvebocsok egynegyede jegesmedve, a többiek barnamedvék. Hány fős az osztály, ha tudjuk, hogy a fiú barnamedvék száma megegyezik a lányok számának felével?

Végeredmény

30

Megoldás

1. A feladatban megadták, hogy hányan járnak egy-egy szakkörre. Ne hagyjuk figyelmen kívül, hogy ezekben a létszámokban azok is benne vannak, akik több szakkörre is járnak! Ez azt jelenti, hogy a fenti számok összege, $17 + 12 + 15 = 44$ lehet, hogy több, mint az osztály létszáma, hiszen lehetnek olyanok, akiket többször számoltunk.

2. Az előző pont összeadásában kétszer számoltuk azokat, akik pontosan két szakkörre járnak, és háromszor azokat, akik pontosan három szakkörre járnak (ezekről a csoportokról azt tudjuk, hogy létszámaik aránya 5:1), az osztály létszáma tehát úgy adódik a 44-ből, hogy levonjuk az előbbieket egyszer, az utóbbiakat kétszer.

3. Az előbbi pont alapján a háromszakkörösöket x-szel jelölve felírhatjuk az osztály létszámára az alábbi kifejezést: $44 - 5 \cdot x - 2 \cdot x = ?$

4. A feladat utolsó két mondata szerint a jegesmedve fiúk, a barnamedve fiúk és a lányok egymáshoz viszonyított aránya rendre 1:3:6. Mivel a fiúk-lányok létszáma csak egész szám lehet, ez az arány azt jelenti, hogy az osztály létszáma egy 10-re kerek szám.

5. Az 1. pontban adott egy felső korlát a feladat megoldására, amely így a 4. pontot is figyelembe véve 10, 20, 30 vagy 40 lehet.

6. Ha mind a négy lehetséges megoldást belepróbáljuk a 3. pont egyenletének jobb oldalára, azt tapasztaljuk, hogy 10-re, 20-ra és 40-re x nem egész számnak adódik (ami nem lehetséges, bocsokról lévén szó), 30-ra azonban igen, így a 30 a helyes megoldásunk.

6. feladat

Ada, Bubu és Csabi kaptak Dóritól egy-egy pozitív egész számot, és Dóri azt is elárulta, hogy a számok reciprokösszege 1. Ezek után megkérdezte tőlük, hogy ki tudják-e találni a három szám összegét. Sorban a következőket válaszolták:
Ada: „Nem tudom, hogy mi a három szám összege.”
Bubu: „Én sem tudom a számok összegét.”
Csabi: „Engem ez az egész nem érdekel.”
Ada: „Én már tudom az összeget.”
Melyik számot adta Dóri Bubunak?

Végeredmény

3

Megoldás

1. Legyen a három szám $e \leq f \leq g$, ekkor a feltétel szerint $\frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = 1$. Minél nagyobb egy szám, annál kisebb a reciproka, ezért tudjuk, hogy $\frac{1}{e} \geq \frac{1}{f} \geq \frac{1}{g}$ (egyenlőség akkor lehet, ha maguk a számok is egyenlőek). Vegyük észre azt is, hogy ha két számot ismerünk, akkor a harmadikat már egyértelműen ki tudjuk számolni!

2. Vizsgáljuk meg, milyen számhármasok jöhetnek szóba! Végezzünk esetszétválasztást a legkisebb szám, e szerint.

   (a) $e \neq 1$, mivel minden szám, és így a reciprokuk is pozitív, tehát ha $e = 1$ teljesülne, akkor a reciprokösszeg $\frac{1}{1} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \geq 1$ lenne.

   (b) $e = 2$ esetén $f \neq 2$, mivel ekkor a reciprokösszeg $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{g} \geq 1$ lenne.
   $f = 3$ viszont megoldást ad, ekkor $g = 6$.
   $f = 4$ szintén megoldást ad, ekkor $g = 4$.
   $f > 4$ már nem adhat jó megoldást, mivel ekkor az $f \leq g$ nem tudna teljesülni. (Meggondolható, hogy rögzített e esetén nagyobb f értékhez kisebb g tartozik.)

   (c) $e = 3$ esetén csak az $f = g = 3$ megoldás adódik,
   $f > 3$ esetén az $f \leq g$ nem teljesülhet.

   Összességében tehát megállapíthatjuk, hogy Dóri csak a $(2, 3, 6)$, a $(2, 4, 4)$ és a $(3, 3, 3)$ számhármasok valamelyikét adhatta Bubuéknak. A három számhármas esetén Dóri által kérdezett összeg $2+3+6 = 11$, $2 + 4 + 4 = 10$ és $3 + 3 + 3 = 9$.

3. Biztos, hogy Ada nem 6-ost kapott. Ugyanis ha 6-ost kapott volna, akkor biztos lehetett volna benne, hogy a $(2, 3, 6)$ számhármasról van szó, és tudta volna az összeget. Ugyanígy biztos az is, hogy nem 4-est kapott, mivel ekkor tudta volna, hogy a $(2, 4, 4)$-es számhármasról van szó, és szintén tudta volna az összeget.

	A	
2	2	3
3	$\cancel{4}$	3
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	3

4. Most vizsgáljuk meg Bubu első megszólalását! Az előzőleg elmondott logika szerint kiderül, hogy ő sem kaphatott sem 6-ost, sem 4-est.

	A			B	
2	2	3	2	2	3
3	$\cancel{4}$	3	3	$\cancel{4}$	3
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	3	$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	3

Ebből viszont már kiderül, hogy nem lehet a kiosztott számhármas a $(2, 4, 4)$, mivel sem Ada, sem Bubu nem kaptak 4-est, márpedig a $(2, 4, 4)$ esetén a három gyerek közül csak egy lehet, aki nem négyest kap.

	A			B	
2	$\cancel{2}$	3	2	$\cancel{2}$	3
3	$\cancel{4}$	3	3	$\cancel{4}$	3
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	3	$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	3

5. Csabi megszólalása természetesen semmilyen információt nem rejt, legfeljebb az olvasó megzavarására alkalmas.

6. Bubu megszólalása után Ada már tudja, hogy melyik számhármasról van szó. Ez csak úgy lehetséges, ha a nála lévő szám alapján a még szóba jövő számhármasok, a $(2, 3, 6)$ és a $(3, 3, 3)$ közül el tudja dönteni, melyikről van szó: mivel a 3-as mindkét számhármasban benne van, Ada a 2-est kapta, és a Dóri által kiosztott három szám a $(2, 3, 6)$.

	A	
2	~~2~~	~~3~~
~~3~~	~~4~~	~~3~~
~~6~~	~~4~~	~~3~~

7. Tudjuk, hogy Bubunál nincs a 6-os, és nem lehet nála a 2-es sem (hiszen az Adánál van). Tehát a nála lévő szám a 3-as.

	A	
2	~~2~~	~~3~~
~~3~~	~~4~~	~~3~~
~~6~~	~~4~~	~~3~~

	B	
~~2~~	~~2~~	~~3~~
3	~~4~~	~~3~~
~~6~~	~~4~~	~~3~~

7. feladat

A Százholdas Pagony néhány lakója összeállt egy csapatba és kincskeresésen vettek részt. Az erdőben 99 mézescsuprot találtak, melyek 1-től 99-ig voltak megszámozva. Ezután a mézescsuprokat a számozásuk alapján sorrendbe állították, majd minden kincskereső belenyalt néhány egymás után következő csuporba. Azt vették észre, hogy minden csapattag olyan csuprokba kóstolt bele, melyek sorszámainak összege pontosan 100 volt, de semelyik két tag nem választotta pontosan ugyanazokat a csuprokat. Azt is megállapították, hogy ha többen lettek volna, akkor ezt már nem tudták volna megtenni. Hányan voltak a csapatban?

Végeredmény

2

Megoldás

1. Két különböző versenyző biztosan nem nyalhatott bele ugyanannyi csuporba, mivel az egyikük által megkóstolt csuprokon lévő számok összege száz, akkor ha a másik egy kisebb számútól kezdte a sort, akkor az ugyanannyi szám összege kevesebb mint száz, ha nagyobb számútól, akkor több.
2. Két csuporba biztosan nem nyalhatott bele versenyző, mivel két egymást követő szám összege mindig páratlan.
3. Három csuporba szintén nem nyalhatott bele senki, mivel három egymást követő szám összege osztható hárommal. (Lesz köztük egy, amelyik osztható hárommal, egy, amelyik 1 maradékot ad, és egy, amelyik 2-t.)
4. Négy csuporba szintén nem nyalhattak bele, mivel négy egymást követő szám összege soha nem osztható néggyel. (Minden fajta maradék pontosan egyszer fog előfordulni, így az összeg maradéka a $0+1+2+3 = 6$ maradékával fog megegyezni.)
5. Öt csuporba bele lehet nyalni: a $18 + 19 + 20 + 21 + 22$ összeg éppen egyenlő 100-zal.
6. Hat csuporba nem nyalhattak bele, mivel hat egymást követő szám összege páratlan (három páros és három páratlan lesz közöttük).
7. Hét csuporba szintén nem nyalhattak bele, mivel hét egymást követő szám összege osztható 7-tel. (Minden fajta maradék pontosan egyszer fog előfordulni, így az összeg maradéka a $0+1+2+3+4+5+6 = 21$ maradékával fog megegyezni.)
8. Nyolc csuporba lehetséges belenyalni, ugyanis $9+10+11+12+13+14+15+16$ éppen 100-zal egyenlő.
9. Kilenc egymást követő szám összege osztható 9-cel, ezért az összegük nem lehet 100 (de az is elég, hogy osztható 3-mal). (Minden fajta maradék pontosan egyszer fog előfordulni, így az összeg maradéka a $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ maradékával fog megegyezni.)
10. Tíz csuporba nem lehet belenyalni, ugyanis 10 egymást követő szám összege nem osztható 10-zel. (Minden fajta maradék pontosan egyszer fog előfordulni, így az összeg maradéka a $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ maradékával fog megegyezni.)
11. Tizenegy csuporba sem lehet belenyalni, mert 11 egymást követő szám összege osztható 11-gyel. (Minden fajta maradék pontosan egyszer fog előfordulni, így az összeg maradéka a $0+1+2+ \ldots +9+10+11 = 66$ maradékával fog megegyezni.)
12. Tizenkét csuporba sem lehet belenyalni, mivel 12 egymást követő szám összege osztható 3-mal. (Három 0, három 1 és három 2 maradékot adó lesz közöttük.)
13. Tizenhárom csuporba sem nyalhattak bele, mivel 13 egymást követő szám összege osztható 13-mal. (Minden fajta maradék pontosan egyszer fog előfordulni, így az összeg maradéka a $0 + 1 + 2 + \ldots + 11 + 12 + 13 = 91$ maradékával fog megegyezni.)
14. Tizennégy vagy annál több csuporba szintén nem nyalhattak bele, mivel 14 vagy annál több egymást követő nemnegatív szám összege legalább $0 + 1 + 2 + \ldots + 12 + 13 + 14 = 104$, tehát több, mint 100.
15. Ezek szerint a csapatnak legfeljebb 2 tagja lehetett, akik 5, illetve 8 csuporba nyaltak bele.

2. megoldás

1. Két csuporba nem nyalhatott bele senki úgy, hogy az összeg 100 legyen, mivel a legközelebbi értékek, amit két egymást követő szám összege adhat a $49 + 50 = 99$ és az $50 + 51 = 101$. Ez két szomszédos számmal kezdődő sorozat, így köztes értéket két egymást követő számból álló összeg biztosan nem vehet föl.
2. Hasonlóan, mivel 32-től 34-ig a számok összege 99, 33-tól 35-ig pedig már 102, ezért nem lehet három szomszédos szám összege sem 100.
3. 23-tól 26-ig a számok összege 98, és 24-től 27-g pedig már 102, ezért nem lehet négy szomszédos szám összege sem 100.
4. 18-tól 22-ig a számok összege éppen 100-zal egyenlő, tehát öt csuporba belenyalhatott valamelyik csapattag.
5. 14-től 19-ig a számok összege 99, 15-től 20-ig már 105, ezért nem lehet hat szomszédos szám összege 100.
6. 11-től 17-ig a számok összege 98, 12-től 18-ig már 105, emiatt nem lehet hét szomszédos szám összege 100.
7. 9-től 16-ig a számok összege éppen 100-zal egyenlő, tehát nyolc csuporba belenyalhatott valamelyik versenyző.
8. 7-től 15-ig a számok összege 99, 8-tól 16-ig már 106, tehát kilenc egymást követő szám összege sem lehet 100.
9. 5-től 14-ig a számok összege 95, 6-tól 15-ig már 105, tehát tíz egymást követő szám összege sem lehet 100.
10. 4-től 14-ig a számok összege 99, 5-től 15-ig már 110, ezért nem lehet tizenegy egymást követő szám összege sem 100.
11. 2-től 13-ig a számok összege 90, 3-től 14-ig már 102, ezért nem lehet tizenkét egymást követő szám összege sem 100.
12. 1-től 13-ig a számok összege 91, 2-től 14-ig már 104, tehát nem lehet tizenhárom egymást követő szám összege sem 100.
13. 1-től 14-ig a számok összege 105, tehát tizennégy, vagy annál több egymást követő pozitív egész szám összege mindig nagyobb, mint 100.
14. Ezek szerint a csapatnak legfeljebb 2 tagja lehetett, és ők 5, illetve 8 csuporba nyaltak bele.

8. feladat

Az Óperenciás-tengeren fekvő Vadkörte-szigetre érkező telepesek a szigetet három egyenes vonallal hét régióra osztották fel. Ezután a választott kormányzójuk elrendelte, hogy minden régió alapítson legalább egy, de legfeljebb hét várost úgy, hogy semelyik két régióban ne legyen azonos a városok száma. A telepesek azt szeretnék, hogy mindhárom egyenesre igaz legyen, hogy a két oldalán ugyanannyi város van. Mik a lehetséges értékei a tengerrel nem érintkező régióban alapított városok számának, ha mind a kormányzó, mind a telepesek kívánsága teljesül?

Végeredmény

1, 2 és 4

Megoldás

1. A hét régióba 1-től 7-ig kell elhelyeznünk a számokat, tehát összesen $1+2+3+4+5+6+7=28$ városunk lesz.

2. Tekintsük az egyik egyenes vonalat: 4 régió lesz az egyik oldalán, 3 a másikon. A 28 városból így 14-nek kell a 4 régióba és 14-nek kell a 3 régióba kerülnie.

3. Próbáljuk meg szisztéma szerint, hogy melyik 4 szám összegeként jöhet ki a 14. $1+2+3$ kombinációhoz 8 lenne a negyedik szám, ez nem jó. $1+2+4+7$ jó kombináció. Így szisztematikusan megnézve kiderül, hogy a következő kombinációk jók:

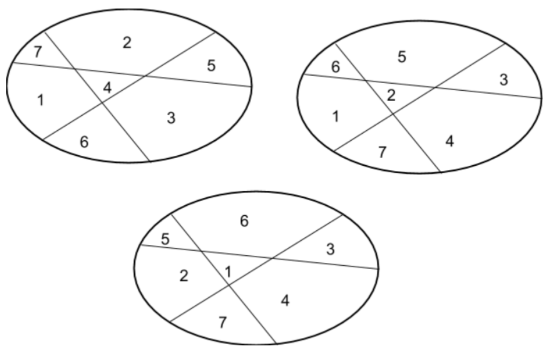
   (a) $1+2+4+7$
   (b) $1+2+5+6$
   (c) $1+3+4+6$
   (d) $2+3+4+5$

4. Három egyenes vonalunk van, és mindegyiknek az egyik oldalán 4 régió van, amibe a fenti városszámokat kell elhelyeznünk. Ez azt jelenti, hogy a fenti négy kombinációból egyszerre háromra mindig szükségünk van. Mivel mindig egyet hagyunk ki, így erre négy lehetőségünk van.

5. A középső régió mindegyik egyenesnek arra az oldalára esik, ahol a 4 régió van. Ezért ennek a régiónak a városszáma mindegyik kombinációban benne kell legyen, és ez lesz a középső régióban.

6. Ha az első kombinációt hagyjuk ki, akkor nincs olyan szám, ami mindhárom kombinációban benne van, így ez nem jó megoldás. Ha a második kombinációt hagyjuk ki, akkor a középső régióba 4 város kerül, ha a harmadik kombinációt, akkor 2, ha az utolsót, akkor 1.

7. Rajzoljunk ábrákat a fenti feltételek alapján:



8. Mivel mindhárom értékhez van jó elrendezés, mindegyik megoldás is egyben.

9. feladat

A síkon 100 pontot pirosra színezünk. Ezután behúzunk 2019 egyenest, amelyek mindegyikén van legalább egy piros pont. Hány olyan metszéspontja lehet legfeljebb az egyeneseknek, ami nem piros?

Végeredmény

2017791

Megoldás

1. A legtöbb metszéspont abban az esetben állhat elő, ha semelyik két egyenes nem párhuzamos, vagyis bármely kettőnek van metszéspontja. Ezen metszéspontok közül néhány a piros pontokra fog esni, hiszen ellenkező esetben minden piros ponton legfeljebb egy egyenes mehetne át, ami $2019 > 100$ miatt nem lehetséges.

2. Feltehető, hogy az egyenesek közül egyik sem megy át több piros ponton, hiszen ha létezne egy egyenes, amely legalább két piros ponton átmegy (jelöljük ezt az egyenest e-vel), akkor ha azt úgy forgatnánk el az egyik piros pontja körül (jelöljük ezt a pontot P-vel), hogy továbbra se legyen párhuzamos másik egyenessel, de semelyik másik piros ponton vagy egyenesek másik metszéspontján ne menjen át, akkor ezzel a lépéssel biztosan nem csökkentjük a nem piros metszéspontok számát. Viszont ha másik egyenes is átmegy az e egyenes egy P-től különböző piros pontján, akkor e megfelelő elforgatásával még nő is a nem piros metszéspontok száma. Vagyis ezekkel az esetleges javító (semmiképp sem rontó) lépésekkel előállíthatnánk olyan konstrukciót, melyben a nem piros metszéspontok száma nem kevesebb mint abban a kiinduló konstrukcióban, ahol több piros ponton is átmehettek egyenesek.

3. Ezután az optimális konstrukcióhoz úgy jutunk, ha az egyeneseket egyesével vesszük fel. Egy újabb egyenes felvételénél akkor nyerjük a legtöbb nem piros metszéspontot, ha az nem párhuzamos semelyik másikkal, nem megy át már meglévő nem piros metszésponton, és azon a piros ponton megy át, mely az előző egyenesek közül a legkevesebbnek pontja (ha több piros pont is van, melyen ugyanannyi egyenes megy át, mindegy melyiket választjuk). Ily módon, ha eddig n egyenest vettünk fel, melyek közül az új egyenes piros pontján p ment át, akkor $n - p$ új nem piros metszéspont születik, ennél több az előzőek miatt nem lehetséges.

4. Leszámlálva az egyenesek egyesével felvétele során születő nem piros metszéspontokat így azt látjuk, hogy az első száz egyenes n-et hoz, ha előtte már n egyenes volt, a második száz $n - 1$-et, a harmadik száz $n - 2$-őt, és így tovább a 2000. egyenes $1999 - 19$-et, a 2019. pedig $2018 - 20$-at.

5. Vagyis a metszéspontok számát megkapjuk, ha összeadjuk az egyes egyenesek által létrehozott új metszéspontokat. Ez az összeg a fentiek alapján 1-től 2018-ig a számok összege, melyből kivonjuk 1-től 19-ig a számok összegét 100-szor, illetve a 20-at 19-szer. Vagyis a végeredmény a Gauss-módszerből ismert képletet felhasználva $\frac{2018 \cdot 2019}{2} - \frac{19 \cdot 20}{2} \cdot 100 - 20 \cdot 19 = 2017791$.

10. feladat

Egy 25 fős osztályban a tanár felír egy számot a táblára. A gyerekek sorra a következő megállapításokat teszik róla: „Osztható 1-gyel.”, „Osztható 2-vel.”, „Osztható 3-mal.”, . . . , „Osztható 25-tel.”. Melyik a lehető legkisebb szám, amit a tanár felírhatott a táblára, ha tudjuk, hogy pontosan 2 diák tévedett, ráadásul tudjuk azt is, hogy ők két egymást követő számot mondtak?

Végeredmény

787386600

Megoldás

1. Azok a diákok, akik azokat a számokat mondták, melyeknek a 2-szerese és a 3-szorosa is 25-nél kisebb, nem tévedhettek, hiszen tudjuk, hogy csak 2 diák tévedett. Ha viszont ők tévednének, akkor a kétszerest és háromszorost mondó diák is tévedett volna, ami ellentmondás, mert csak ketten tévedtek. Így $1, 2, 3, \ldots, 8$ osztja a táblán lévő számot.

2. Az előző állítás következménye, hogy az előző számok prímtényezőinek szorzataként előálló számokat mondók (vagyis $10, 12, 14, 15, 20, 21, 24$) se tévedhettek.

3. Mivel két egymást követő számot mondó diák tévedett, így tudjuk azt is, hogy azok sem tévdehettek, akik esetén mindkét szomszédos számról (25 esetén a 24-ről) már tudjuk, hogy nem tévedtek. Így nem tévedés a $9, 11, 13, 25$ se.

4. A 2. pontban szereplő gondolatot megismételve kiderül, hogy a $9 \cdot 2 = 18$ és a $11 \cdot 2 = 22$ se tévedés. Ez után a 3. pontban szereplő gondolatot a kibővített listára megismételve azt is megtudjuk, hogy a 19 és a 23 sem tévedés.

5. Ez után már csak a 16-ről és a 17-ről nem tudjuk, hogy biztosan nem tévedés, vagyis a szám 16-tal és 17-tel nem osztható.

6. Mivel a legkisebb olyan számot keressük, melyet a tanár a táblára írhatott, az összes többi szám legkisebb közös többszöröse, vagyis $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 = 787386600$ a megoldás.

11. feladat

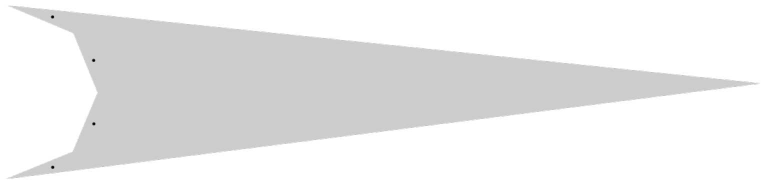
A Sokszögletű Kerekerdő növényzete olyan sűrűn nő, hogy azon lehetetlen átlátni. Az erdő közepén azonban ott fekszik az Ezersarkú Tisztás, mely nevéhez hűen 1000 csúcsú sokszög alakú, itt viszont semmi sem zavarja a látási viszonyokat. Az erdő lakói meghirdették a Századszáz Országra Szóló Bújócskaversenyt, melyet az Ezersarkú Tisztáson rendeztek. Legfeljebb hányan vehettek ezen részt, ha kezdetben semelyik két bújócskázó nem látta egymást?

Végeredmény

998

Megoldás

1. Az alábbi ábrán látható, hogyan tud egy 6 csúcsú sokszög alakú tisztáson 4 versenyző elhelyezkedni úgy, hogy semelyik kettő ne lássa egymást:



2. Ehhez hasonló elrendezést 1000 csúcsú sokszöggel is meg lehet valósítani: pl a sokszög 999 csúcsa egy szabályos 1996-szög szomszédos csúcsaira esik (ekkor az 1. és a 999. csúcs épp átellenes lesz, azaz egy, az 1996-szög középpontján áthaladó átló két végpontjára illeszkedik). Az 1000. csúcsot kellően távol felvéve egy alkalmas sokszöget kapunk.

3. Bár intuitíven nagyon egyértelműnek érződik, egyáltalán nem könnyű annak indoklása, hogy 998-nál több versenyző nem bújhat el a réten. A bizonyításhoz fel fogjuk használni, az alábbi állítást:

   ($\star$) Bármely n csúcsú sokszög felbontható $n-2$ darab háromszögre.

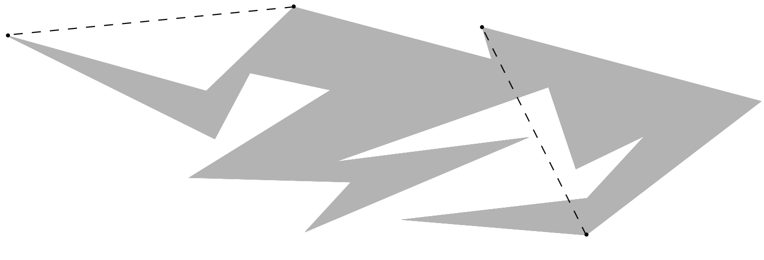
   A ($\star$) állításból következik, hogy az 1000 csúcsú sokszög esetén igaz, hogy az felbontható 998 darab háromszögre. Egy háromszögön belül legfeljebb egy versenyző lehet (minden háromszög konvex), tehát 998-nál több versenyző semmiképp nem bújhat el a réten.

   (Természetesen abból, hogy két versenyző nem azonos háromszögben van, még nem következik, hogy ne látnák egymást.)

4. A ($\star$) állítást az alábbi módon bizonyítjuk be: keresünk egy átlót, ami teljes egészében a sokszögben halad, és ennek segítségével két kisebb oldalszámú sokszögre bontjuk fel az eredeti síkidomokat. Utána mindkettő sokszögre megismételjük ezt a lépést, és így tovább, amíg a háromnál nagyobb oldalszámú sokszögek „el nem fogynak”.

5. A ($\star$) állítás bizonyításához szükséges átlót – ami teljes egészében a sokszögön belül halad – az alábbi módon kereshetjük meg. Konvex és konkáv sokszög esetén is igaz, hogy biztosan van olyan csúcsa, ahol 180°-nál kisebb belső szöge van, hívjuk ezt a csúcsot B-nek, a vele szomszédos csúcsokat A-nak és C-nek.

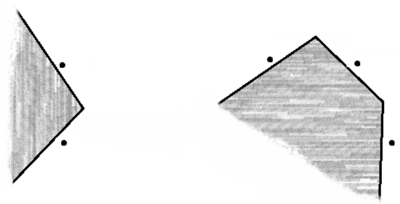
   - Ha az AC szakasz teljes egészében a sokszög belsejében halad (konvex sokszög esetében ez biztosan így lesz), akkor az AC szakasz mentén két sokszögre bontottuk az eredeti síkidomunkat: egy háromszögre és egy eggyel kisebb oldalszámú sokszögre. Konkáv sokszög esetében azonban előfordulhat, hogy az AC szakasz nem a sokszögön belül halad, ahogyan azt az alábbi ábra mutatja.



- Ha az AC szakasznak van a sokszögön kívül haladó része, akkor az ABC háromszögön belül biztosan van legalább egy csúcsa a sokszögnek. Keressük meg a sokszög ABC háromszögbe eső csúcsai közül azt, amelyik a legtávolabb van az AC szakasztól, és jelöljük ezt P-vel (ha több csúcs is van ugyanolyan távolságra, akkor válasszunk ki közülük az AB oldalhoz legközelebbit). A BP szakaszt biztosan nem metszi el a sokszög egyik oldala sem, mivel egy őt metsző szakasz egyik végpontja az ABC háromszögön belül lenne, de a P pontnál távolabb az AC szakasztól. A BP átló tehát teljes egészében a sokszögön belül halad, így ennek segítségével fel tudjuk bontani két kisebb oldalszámú sokszögre.

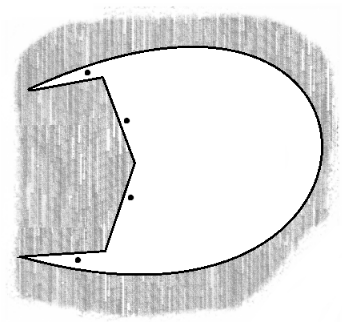
Megjegyzés

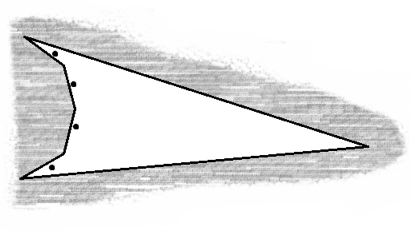
Ez a feladat tipikus példája annak, hogy lehet egy megoldás egyszerre nagyon egyszerű, ugyanakkor nagyon nehéz. Egyszerű, mert nem bonyolult a kulcsgondolat, miszerint a sokszög csúcsai egy kivétellel egy homorú ívre illeszkednek, plusz van még egy csúcs kellően távol, könnyen megérthető, egyből látszik róla, hogy így valóban el lehet helyezni 998 versenyzőt. Másrészt viszont nehéz, mivel nehéz rájönni, kell hozzá valami ötlet. (Itt most csak a megoldás első felére gondolunk, annak bizonyítása, hogy ennél több viszont tényleg nem lehet, már valóban nem mondható egyszerűnek.)
Az ötlet nehézségét érzésünk szerint az adja, hogy amikor az ember megpróbál maga elég képzelni egy sokszöget, még ha egy nagyon furcsa sokszöget is, akkor ez az elrendezés nem jut az eszébe. Ami segíthet, ha nem egyből az egész sokszöget akarjuk felrajzolni, hanem csak mondjuk néhány oldalát. Hogyan lehet, hogy két versenyző nem látja egymást, ha minél kevesebb csúcsot szeretnénk „elhasználni”? Hogyan tudunk ehhez a két versenyzőhöz egy harmadikat hozzávenni úgy, hogy továbbra is minél jobban takarékoskodjunk a csúcsokkal?



`Szürkével az erdő, azaz a sokszögön kívüli rész van jelölve.`

Ezek után kialakulhat egy elképzelés arról, hogy nagyjából hogyan kellene kinéznie a sokszögnek, végül ebből rá lehet jönni, hogyan lehet ezt valóban minél kevesebb csúcsot elhasználva megvalósítani.





12. feladat

Trükkös Tivadarnak van hét trükkös pénzérméje. Mindegyik érme egyik oldalán az 1-es szám található. Az érmék másik oldalán pedig rendre az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}$ törtszámok. Egy unalmas délután dobálta az érméket, mindannyiszor egyszerre dobta fel mind a 7 érmét. Csoda történt: az első 128 dobás között nem volt két egyforma. Tivadar minden dobás után le is írta a dobott számok szorzatát. Mennyit kap, ha összeadja a lapon szereplő 128 számot?

Végeredmény

4,5

Megoldás

1. Minden érmének vagy az az oldala van felül, amin az 1-es van, vagy az az oldala van felül, amin a törtszám van (a törtszám minden érmén különböző). 7 db érme van, így $2^7 = 128$-féle dobás lehetséges. Tehát a Tivadar az összes lehetséges dobás szorzatainak összegét kapja.
2. n darab pénzérme esetére a kérdéses összeget jelöljük S_n-nel! (Mi S_7-re vagyunk kíváncsiak.)
3. A 2^n-féle lehetséges dobást két részre tudjuk bontani: a dobások egyik felében az $\frac{1}{n+1}$-et tartalmazó pénzérme úgy esett, hogy az $\frac{1}{n+1}$ van felül rajta, a dobások másik felében pedig az 1-es van felül rajta.
   - A dobások első felében (2^{n-1}-féle dobás) minden szorzatban szerepel az $\frac{1}{n+1}$, így a szorzatok összegéből kiemelhető. A kiemelés után pont S_{n-1} marad (hiszen az $\frac{1}{n+1}$-hez tartozó pénzérmét a kiemeléssel pont „kiszedtük a játékból”).
   - A dobások másik felénél (szintén 2^{n-1}-féle dobás) kapott összeg pont S_{n-1}, hiszen itt az $\frac{1}{n+1}$-hez tartozó érmén mindig 1-es van, így a szorzatokba „nem számít bele”.
4. A fentiek alapján S_n-et ki tudjuk fejezni S_{n-1}-gyel: $S_n = \frac{1}{n+1} \cdot S_{n-1} + S_{n-1} = \left(\frac{1}{n+1} + 1\right) \cdot S_{n-1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot S_{n-1}$.
5. Az 1 darab pénzérméhez tartozó összeg $S_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, hiszen ezen az egy pénzérmén vagy az 1-es, vagy az $\frac{1}{2}$ van felül.
6. S_7 a fenti iterációs lépés hatszori alkalmazásával megkapható S_1-ből: $S_7 = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot S_1 = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$.
7. A szorzatban a 9-es és a 2-es kivételével minden számláló és nevező kiesik, tehát a végeredmény: $S_7 = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

13. feladat

A svábbogarak börtönében 99 svábbogár sorakozott fel az ebédosztáshoz, azonosítószámuk szerint növekvő sorrendben. A konyhához vezető folyosó fala fehérre van meszelve, a padlóját pedig pontosan 2×99 csempe borítja, a börtöntöltelékek a jobb oldali csempesoron állnak. Egy csempén (biztonsági okok miatt) csak egy svábbogár állhat. Azonban rossz sorrendben álltak fel, pont fordítva kellett volna, az azonosítószám szerint csökkenő sorrendben. A fegyőr rájuk parancsol, hogy kezdjék meg az átrendeződést, a biztonsági szabályok betartásával. Minden másodpercben, a fegyőr sípszavára egy bogár átmehet egy szomszédos csempére (olyanra, melynek közös oldala van az eredeti csempével), azonban egy csempén továbbra is csak egy bogár tartózkodhat. Az ételosztás akkor kezdődhet meg, ha mindannyian a jobb oldalon, a helyes sorrendben állnak. Legkevesebb hány másodperc múlva kerülhet erre sor?

Végeredmény

5096

Megoldás

1. Először alsó korlátot adunk a lépések számára, majd mutatunk olyan konstrukciót, melyre ez megvalósul.

2. Először is mindenkinek legalább annyit kell lépnie, mint amilyen messze van a céljától kezdetben. A középső bogár esetén ez 0, a szomszédaira 2-2, kifelé haladva tovább 4-4, 6-6, stb. Végül az első és az utolsó egymástól 98 távolságra vannak. Ez összesen $2 \cdot (2 + 4 + \ldots + 98) = 4900$ lépés.

   Legalább 98 bogárnak a másik sorba is át kell lépnie valamikor, hiszen ha lenne 2, akik sosem lépnek át, akkor ők nem tudnák megkerülni egymást, márpedig bármely kettőnek helyet kell cserélnie. Node aki átlép egyszer, annak vissza is kell lépnie valamikor, ez összesen tehát legalább $2 \cdot 98 = 196$ lépés.

   Tehát biztosan szükség van legalább $4900 + 196 = 5096$ lépésre.

3. Kezdetben a bogarak így helyezkednek el a folyosón:

bal oldal					...			
jobb oldal	1	2	3	4	...	97	98	99

Innen 98 lépéssel elérhető:

bal oldal		2	3	4	...	97	98	99
jobb oldal	1				...			

Még 98 lépés árán:

bal oldal		2	3	4	...	97	98	99
jobb oldal					...			1

Innen 97 lépéssel:

bal oldal			3	4	...	97	98	99
jobb oldal							2	1

További 95 lépéssel:

bal oldal				4	...	97	98	99
jobb oldal					...	3	2	1

Hasonlóan tovább. A 45-ösnek, aki a középső, csak 1-et kell lépnie, a 46-osnak már 3-at, a 47-esnek 5-öt, stb.

bal oldal					...			99
jobb oldal		98	97	96	...	3	2	1

Végül a 99-esnek már 99-et:

bal oldal					...			
jobb oldal	99	98	97	96	...	3	2	1

4. Ez összeadva 5096 lépés, tehát legalább 5096 másodpercre van szükség, és annyi elég is.

14. feladat

Egy segélyszervezet egy 100 napos jótékonysági kampány keretében szeretne támogatást nyújtani Éhenkórácia 100 legkisebb lakosságú településének. Az előkészítő felmérés során kiderült, hogy a lakók száma bármely két településen különböző, illetve az is, hogy a támogatott települések közül a legnagyobb lélekszámúban éppen 100-an laknak. A kampány során minden nap olyan segélycsomagokat állítanak össze, amelyek épp a nap sorszámával megegyező számú tallért tartalmaznak, és minden olyan településnek juttatnak egy csomagot, ahol a lakosság el tudja igazságosan osztani azt (tehát például a 6. napon egy-egy 6 talléros csomagot juttatnak el az 1, a 2, a 3 és a 6 lakosságú településeknek, és így összesen 12 lakosnak jut rész támogatásból). Hány olyan nap lesz a kampány során, amikor összesen páratlan számú éhenkóráciai részesül a szervezet juttatásából?

Végeredmény

17

Megoldás

1. A 100 település közül bármely kettőben különböző a lakók száma, ami csak úgy lehetséges, hogy az egyes falvakban rendre 1, 2, ...100 lakó van.

2. Minden napon pontosan azon települések lakói kapnak segélycsomagot, amelyek lakóinak száma osztja a nap sorszámát, vagyis az n-edik napon éppen annyian kapnak, amennyi n osztóinak összege.

3. Legyen $p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$ az n prímtényezős felbontása. Az n osztóinak összegét a prímtényezők ismeretében a következőképpen is számolhatjuk:

   $$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{k_1}) \cdot (1 + p_2 + \ldots + p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_l + \ldots + p_l^{k_l}).$$

   (A képlet helyességét a zárójeleket felbontva könnyen ellenőrizhetjük.)

   A kérdés az, hogy hány 100-nál nem nagyobb pozitív egész számnak páratlan az osztóinak az összege. A fenti szorzat pontosan akkor páratlan, ha minden tényezője páratlan.

4. Vegyük észre, hogy a 2 kitevője a prímtényezős felbontásban nem számít, hiszen az $1 + 2 + \ldots + 2^m$ összeg minden m természetes számra páratlan (Az $m = 0$ eset természetesen annak felel meg, hogy n páratlan.)

5. Minden más prímnek minden hatványa páratlan, így az egyes tényezők pontosan akkor lesznek páratlanok, ha páratlan sok tagból állnak, vagyis $k_1 + 1, \ldots, k_l + 1$ páratlanok, kivéve esetleg a 2 kitevőjét.

6. Vagyis pontosan azon számokra páratlan az osztók összege, amelyek prímtényezős felbontásában a páratlan prímtényezők páros kitevőn vannak. Ezek éppen a páratlan négyzetszámok és kettőhatványszorosaik. Ezek közül a 100-nál nem nagyobbak a következők:

   1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,
   9, 18, 36, 72,
   25, 50, 100,
   49, 98
   81.

15. feladat

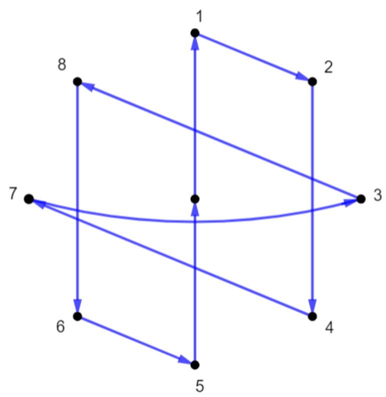
Gráfország grófjai utazásaikat griffhátón bonyolítják. Az ország mind a 9 városában van egy-egy griffistálló, a griffek innen szállnak fel és ide érkeznek. Egy griff hátán egyszerre csak egy gróf fér el, és egy griff naponta csak egy utat vállal (azaz egy grófot elszállít egy városból egy másikba). Ráadásul két griff ugyanazon a napon nem vállal olyan utat, aminek a kiinduló- és a célállomása is ugyanaz. Gráfország grófjai egy napon a fővárosból országjáró körútra indultak, váltott griffeken mindannyian meglátogatták Gráfország minden városát legalább egyszer, majd még ugyanazon a napon visszatértek a fővárosba. Legfeljebb hány gróf élhet Gráfországban?

Végeredmény

8

Megoldás

1. Egy gróf az útja során a fővárosból legalább egy kifelé, és legalább egy befelé repülő griff hátán is utazik.
2. A fővárosból legfeljebb 8 griff repül kifelé egy adott napon, és legfeljebb 8 griff érkezik meg oda, hiszen Gráfországnak 8 másik városa van, és két város között egy adott irányba csak egy griff közlekedik.
3. Ebből következik, hogy 8-nál több gróf nem élhet Gráfországban.
4. 8 gróf élhet ott, egy lehetséges konstrukció az országjáró körutakra a következő. Az első gróf útvonala az alábbi kör (középen található a főváros):

   A többi gróf útvonalát úgy kapjuk meg, ha elforgatjuk a fenti körutat a főváros körül 45°-kal, 90°-kal, 135°-kal, stb. (Így nem használja két gróf ugyanazt a griffjáratot semelyik két város között. Ez például úgy látható, ha megvizsgáljuk, melyik gróf mely városba repül az 1-es városból, látni fogjuk, hogy ez a 8 gróf esetén mind különböző. A forgásszimmetria miatt a többi számozott várost már nem is kell leellenőrizni, csak a fővárost.)

Végeredmények

1. 94

2. 10

3. 4

4. 1475

5. 30

6. 3

7. 2

8. 1, 2 és 4

9. 2017791

10. 787386600

11. 998

12. 4,5

13. 5096

14. 17

15. 8