Nagymedve mintafeladatsor

A 8. osztályos spec. mat. tagozatos, a 9. osztályos illetve a 10. osztályos nem tagozatos diákok számára

Összeállította: Szőke Nóra és Varga László

1. Egy 12×12-es tábla bal szélső oszlopának és alsó sorának mind a 23 mezőjén kezdetben egy bábu áll. Egy lépésben egy bábu egy szomszédos mezőre léphet, ha ott nincs bábu, és korábban sem volt még ott bábu. A bábukkal addig lépegetünk, míg a felső sor és a jobb szélső oszlop 23 mezőjére a lehető legtöbb bábu kerül. Hány bábu áll ezután a felső sorban és a jobb szélső oszlopban összesen? (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.)
2. Hófehérke öt egymás mellé szóló mozijegyet nyert egy vetélkedőn. Hányféleképpen oszthatja ki az öt mozijegyet a hét törpe között, ha minden törpe legfeljebb egy jegyet kap és Vidor nem ülhet Morgó mellett?
3. Leírtuk az első 80 pozitív egész számot hármas számrendszerben. Hányszor írtuk le az egyes számjegyet?
4. András, Béla, Csaba, Dávid és Elemér a Lovag és Lókötők Szigetén élnek, így mindegyikük lovag vagy lókötő. A lókötők mindig hazudnak, ezzel szemben a lovagok mindig igazat mondanak. András szerint Béla lovag, de Béla azt állítja, hogy Csaba nem lovag. Csaba szerint Dezső lókötő, Elemér pedig azt mondja, hogy András nem lókötő. Dezső szerint viszont Elemér és András különböző fajtájúak. Az öt fiú közül ki a lovag és ki a lókötő?
5. Legfeljebb hány hegyesszöge lehet egy 2014 oldalú síkbeli sokszögnek?
6. Tekintsük a $H=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ halmaz összes részhalmazát, melyekben az elemeket csökkenő sorrendben rendezzük el! Minden ilyen részhalmazhoz rendeljük hozzá elemeinek váltakozó előjelű összegét úgy, hogy a legnagyobb elem együtthatója pozitív! Mennyivel egyenlő ezen összegek összege?
7. Egy hétfordulós szellemi vetélkedőn 100 tanuló vett részt. Az első hat forduló mindegyikében egy kérdésre kellett választ adni. Akik valamely fordulóban rossz választ adtak, azok kiestek a versenyből, a többiek a következő fordulóba jutottak. A vetélkedő szervezői megfigyelték, hogy a 6. forduló kivételével minden forduló során pontosan annyian estek ki, mint ahányan továbbjutottak az ezt követő fordulóból. Hány tanuló jutott be a 7. fordulóba?
8. Egy 9×9×9-es kocka huszonhét 3×3×3-as kockából áll. A nagy kockában "alagúthálózatot" hozunk létre a következőképpen: Elsőként kivesszük azt a hat 3×3×3-as kockát, amelyik a nagy kocka lapjainak közepén van, majd a középső 3×3×3-as kockát. A második lépésben ugyanígy kilyukasztjuk a megmaradó 20 3×3×3-as kockát a középső, illetve lapközépen lévő egységkockák eltávolításával. Mekkora az így keletkezett test felszíne?
9. Egy 6×6-os tábla bal szélső oszlopának és alsó sorának mind a 11 mezőjén kezdetben egy bábu áll. Egy lépésben egy bábu egy szomszédos mezőre léphet, ha ott nincs bábu, és korábban sem volt még ott bábu. A bábukkal addig lépegetünk, míg a felső sor és a jobb szélső oszlop 11 mezőjére a lehető legtöbb bábu kerül. Hány bábu áll ezután a felső sorban és a jobb szélső oszlopban összesen? (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.)

10. Egy ABC háromszög AB oldalán B-n túl felvettük B pontot úgy, hogy $2AB = BB'$,. Hasonlóan a BC oldalon C-n túl C', az AC oldalon A-n túl az A', pontot úgy, hogy $2BC = CC'$, illetve $2AC = AA'$, Hányszorosa az $A'B'C'$ háromszög területe az ABC háromszög területének?

11. Egy n résztvevős körmérkőzéses pingpong-tornán mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Tudjuk, hogy közöttük biztosan van négy olyan játékos, A, B, C és D, hogy A megverte B-t, C-t és D-t is, B megverte C-t és D-t, míg C megverte D-t. Legalább mekkora az n értéke?

12. Egy n résztvevős körmérkőzéses pingpong-tornán mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Tudjuk, hogy közöttük biztosan van három olyan játékos, A, B és C, hogy A megverte B-t és C-t is, B pedig megverte C-t. Legalább mekkora az n értéke?

13. Egy szabályos 27-szögnek legfeljebb hány átlóját lehet behúzni úgy, hogy bármely kettőnek legyen közös pontja? (A közös végpont is közös pontnak számít.)

14. Egy 8×8×8-as kocka üvegkockákból van kirakva. Legalább hány kis kockát kell kicserélni fakockákra, ha azt szeretnénk, hogy a nagy kocka szemből, oldalról és felülről is átlátszatlan legyen?

15. Egy iskolában kémiát, angolt, franciát, földrajzot, matematikát és fizikát tanítanak Barna, Kovács, Horváth és Nagy tanár urak. Minden tanár 3 szakos, és minden tárgyat két tanár tanít a felsoroltak közül. Az angolt és a franciát ugyanazok tanítják. Nagy tárgyai közül kettőt Kovács is tanít. A matematika tanárai Nagy és Horváth. Horváth kémiát is tanít, Kovács viszont nem tanít fizikát. Kik tanítják a földrajzot?

16. Hányféleképpen juthatunk el egy kocka egyik kiválasztott csúcsából az ettől legtávolabbi csúcsba, ha csak élek, lapátlók és testátlók mentén haladhatunk úgy, hogy a kocka bármely csúcsát legfeljebb csak egyszer érinthetjük, és irányt csak csúcsnál változtathatunk?

17. Mennyi $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2014}}$?

18. Egy kétnapos körmérkőzéses focibajnokságon öt csapat indult, akik közül bármely két együttes pontosan egyszer játszott egymással. Mindkét nap mind az öt csapatnak pontosan két meccse volt. Hányféleképpen kerülhettek megrendezésre a mérkőzések, ha az egy napon lejátszott meccsek sorrendjétől eltekintünk?

19. Egy kétnapos körmérkőzéses focibajnokságon négy csapat indult, akik közül bármely két együttes pontosan egyszer játszott egymással. Mindkét nap ugyanannyi meccs került megrendezésre és mind a négy csapatnak mindkét nap volt mérkőzése. Hányféleképpen kerülhettek megrendezésre a mérkőzések, ha az egy napon lejátszott meccsek sorrendjétől eltekintünk?

20. Mivel egyenlő a 100! számban az utolsó 0-tól különböző számjegy?

21. Hány olyan háromszög van, melynek csúcsai egy szabályos 37 szög csúcsai közül valók és tartalmazzák a sokszög középpontját? (Amelyek egybevágóak, de nem ugyanazok a csúcsaik, azokat különböző háromszögeknek tekintjük.)

22. Egy szabályos nyolcszöget feldaraboltunk paralelogrammákra. Legalább hány téglalap fordul elő garantáltan a paralelogrammák között?

23. Egy 9×9-es sakktábla alsó és felső szélét összeragasztjuk, majd az így kapott hengerfelület két szélső körét is összeragasztjuk, így egy úszógumihoz hasonló felületet (ún. tóruszt) kapunk. Legfeljebb hány királyt helyezhetünk el ezen a ”sakktáblán”, hogy közülük semelyik kettő se üsse egymást?